0001

다음 보기의 수 중에서 소수는 모두 몇 개인가?

<보 기>

ㄱ. 1	ㄴ. 23	ㄷ. 37
ㄹ. 57	ㅁ. 61	ㅂ. 121

① 1개 ② 2개 ③ 3개

④ 4개 ⑤ 5개

* 자연수는 소수, 1, 합성수로 분류할 수 있다.
* 특히, 소수는 1과 자기 자신만을 약수로 갖는 수를 말한다.

ㄱ. 1 : 소수도 합성수도 아니다
ㄴ. 23 : 소수
ㄷ. 37 : 소수
ㄹ. 57 : 5+7=12 이고, 12는 3의 배수이다. 57=3x19 이므로 1과 자기 자신 이외의 수를 약수로 가진다. 따라서, 합성수
57의 약수는 1, 3, 19, 57
ㅁ. 61 : 소수
ㅂ. 121 : 121 = 11x11 이므로 1과 자기 자신 이외의 수를 약수로 가진다. 따라서, 합성수
121의 약수는 1, 11, 121

0002

630 을 소인수분해하면 $2 \times 3^a \times 5 \times b$ 이다. 이때, 자연수 a, b에 대하여 $b-a$ 의 값은? (단, b 는 소수이다.)

① 5　　② 9　　③ 13

④ 17　　⑤ 21

$$\begin{array}{r|l} 2 & 630 \\ \hline 3 & 315 \\ \hline 3 & 105 \\ \hline 5 & 35 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

$a=2,\ b=7$

$\therefore b-a=5$

0003

180의 소인수를 모두 찾은 것은?

① 2, 3, 5　　② 1, 2, 3, 5

③ 2, 2^2, 3, 3^2, 5　　④ 2^2, 3^2, 5

⑤ 1, 2^2, 3^2, 5

$$\begin{array}{r|l} 2 & 180 \\ \hline 3 & 90 \\ \hline 3 & 30 \\ \hline 2 & 10 \\ \hline & \ \ 5 \end{array}$$

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

* 소인수를 찾으시오 라는 뜻은
약수를 찾는 것이 아니라 '소인수'의 종류를 찾으라는 뜻이다.

따라서, 2, 3, 5가 소인수이다.

0004

다음 중 $2 \times 3 \times 5^2$과 약수의 개수가 같은 것은?

① 36 ② 66 ③ 72

④ 81 ⑤ 100

* 약수의 개수는 소인수분해를 한 뒤, 각각의 지수에 1을 더한 뒤 모두 곱한다.
: 왜 이렇게 하는지 "개념서"를 찾아볼 것! (힌트) 표그리기...

따라서 주어진 수의 약수의 개수 : $(1+1)\times(1+1)\times(2+1) = 2\times2\times3 = 12$

(1) $36 = 2^2 \times 3^2$: $(2+1) \times (2+1) = 9$

(2) $66 = 2 \times 3 \times 11$: $(1+1) \times (1+1) \times (1+1) = 8$

(3) $72 = 2^3 \times 3^2$: $(3+1) \times (2+1) = 12$

(4) $81 = 3^4$: $(4+1) = 5$

(5) $100 = 2^2 \times 5^2$: $(2+1) \times (2+1) = 9$

0005

자연수 n을 9로 나누었더니 몫이 3이고, 나머지의 약수의 개수가 3이었다. n의 값을 구하시오.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3 \\
9 & n \\
 & 27 \\ \hline
 & n-27
\end{array}
$$

$0 \leq n-27 < 9$

* 약수의 개수가 3개인 수 = 제곱수 : 2+1=3이기 때문
e.g. 4, 9, 25...

$\therefore$ 0이상 9미만의 제곱수는 4이므로,
$n-27 = 4$, $n=31$

0006

자연수의 약수의 개수를 $< a >$, 모든 약수의 합을 $\{a\}$라 하자. $< 24 > = x$, $\{x\} = y$일 때, $x + y$의 값을 구하시오.

* $24 = 2^3 \times 3$

$< 24 > = (3+1) \times (1+1) = 8$

$\therefore x=8$

* 8의 약수는 1, 2, 4, 8

$\{ 8 \} = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$

$\therefore y=15$

$\therefore x + y = 8 + 15 = 23$

0007

두 수 $A=2^4\times3^2\times5$, $B=2^3\times3^3\times7$의 공약수의 개수를 구하시오.

* 소인수분해가 된 형태로 수가 주어지면, 최대공약수와 최소공배수를 구할 때,
'나누기' 방법이 아닌 '소인수분해' 방법을 이용하는 것이 유리하다.

* '두 수의 공약수의 개수'는 '최대공약수의 약수의 개수'와 동일하다.

$$\begin{array}{l} 2^4\times3^2\times5 \\ 2^3\times3^3\qquad\times7 \\ \hline 2^3\times3^2 \end{array}$$

그러므로 최대공약수는 $2^3\times3^2$이므로, 약수의 개수는 $(3+1)\times(2+1)=12$

∴ A와 B의 공약수의 개수는 12개

0008

세 수 8, 15, 24의 공배수 중 700에 가장 가까운 수를 구하시오.

* 세 수의 공배수는 '최소공배수의 배수'와 동일하다.

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 8 & 15 & 24 \\ \hline 2 & 4 & 15 & 12 \\ \hline 2 & 2 & 15 & 6 \\ \hline 3 & 1 & 15 & 3 \\ \hline & 1 & 5 & 1 \end{array}$$

∴ 최소공배수는 $2^3 \times 3 \times 5 = 120$

최소공배수의 배수 중에서 $120 \times 5 = 600$, $120 \times 6 = 720$ 이므로,
700에 가장 가까운 수는 720

0009

세 자연수 $2^a\times3$, $2\times3\times5^b$, $2^2\times3^c$의 최소공배수가 360일 때, 자연수 a, b, c의 곱 $a\times b\times c$의 값을 구하시오.

$2^a\times3$

$2\times3\times5^b$

$2^2\times3^c$

$2^3\times3^2\times5^1$

$360=2^3\times3^2\times5$

$\begin{cases} a=3 \\ c=2 \\ b=1 \end{cases}$

$\therefore a\times b\times c=3\times1\times2=6$

0010

사과 60개와 바나나 42개를 되도록 많은 학생들에게 똑같이 나누어 주려고 한다. 나누어 줄 수 있는 학생 수를 구하시오.

* 학생마다 똑같은 수의 사과와 바나나를 가져야 한다.
  그리고 학생 수는 되도록 많아야 한다.

'똑같은 수'이므로 60과 42의 공약수이고, 학생 수가 많아야 하므로 '최대공약수'이다.

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 60 & 42 \\ \hline 3 & 30 & 21 \\ \hline & 10 & 7 \end{array}$$

따라서 최대공약수가 6이므로, 학생 수는 6명

0011

가로의 길이가 120cm, 세로의 길이가 150cm인 직사각형 모양의 벽에 남는 부분이 없도록 같은 크기의 가능한 큰 정사각형 모양의 타일을 붙이려고 한다. 이때, 타일의 한 변의 길이를 구하시오.

* 정사각형은 가로와 세로의 길이가 모두 같으므로, 120과 150의 공약수이다.
그런데, 가능한 큰 정사각형이므로 최대공약수이다.

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 120 & 150 \\ \hline 3 & 60 & 75 \\ \hline 5 & 20 & 25 \\ \hline & 4 & 5 \end{array}$$

120과 150의 최대공약수는 2x3x5=30이므로,

정사각형 타일의 한 변의 길이는 30cm이다.

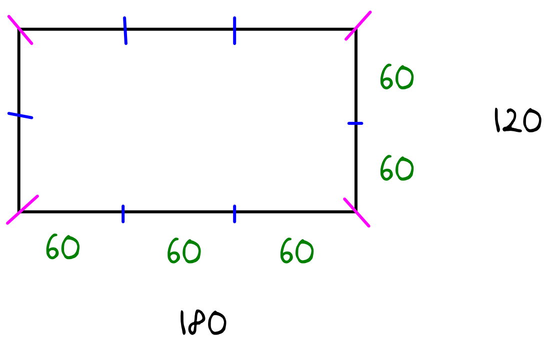
0012

가로의 길이가 180m, 세로의 길이가 120m인 직사각형 모양의 땅 둘레에 일정한 간격으로 나무를 심으려고 한다. 나무 사이의 간격이 최대가 되게 심을 때, 필요한 나무는 몇 그루인가? (단, 네 모퉁이에 반드시 나무를 심는다.)

① 4그루 ② 6그루 ③ 8그루

④ 10그루 ⑤ 12그루

* 핵심은 '일정한 간격'이다.
'일정한 간격'을 구한 다음에 나무의 수를 구한다.



* 가로와 세로의 '일정한 간격'이므로 180과 120의 공약수이고,
간격이 최대이므로 최대공약수이다.

2	180	120
2	90	60
3	45	30
5	15	10
	3	2

최대공약수는 $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$이므로
'일정한 간격' = 60 이다

가로의 한 변에서 간격이 60이므로
나무는 그 사이에 2개가 들어간다

세로의 한 변에서 간격이 60이므로
나무는 그 사이에 1개가 들어간다

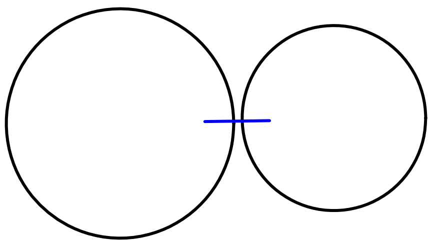
따라서 나무의 개수는 $2 \times 2 + 1 \times 2 = 6$개이고,
모퉁이의 4개와 합치면 총 10그루이다

0013

톱니의 수가 각각 45개, 30개인 톱니바퀴 A, B가 서로 맞물려 돌아가고 있다. 두 톱니바퀴가 한 번 맞물린 후 같은 톱니에서 처음으로 다시 맞물리려면 B는 몇 바퀴 회전해야 하는가?

① 2바퀴 ② 3바퀴 ③ 4바퀴

④ 5바퀴 ⑤ 6바퀴



* 톱니가 맞물려서 같이 돌아가기 때문에, 처음으로 다시 맞물리기 위해서는, '지나간 바퀴의 수'가 45의 배수이면서, 30의 배수이어야 한다.

게다가 처음으로 다시 맞물리는 것이므로, 45와 30의 최소공배수가 된다.

$$\begin{array}{r|rr} 3 & 45 & 30 \\ \hline 5 & 15 & 10 \\ \hline & 3 & 2 \end{array}$$

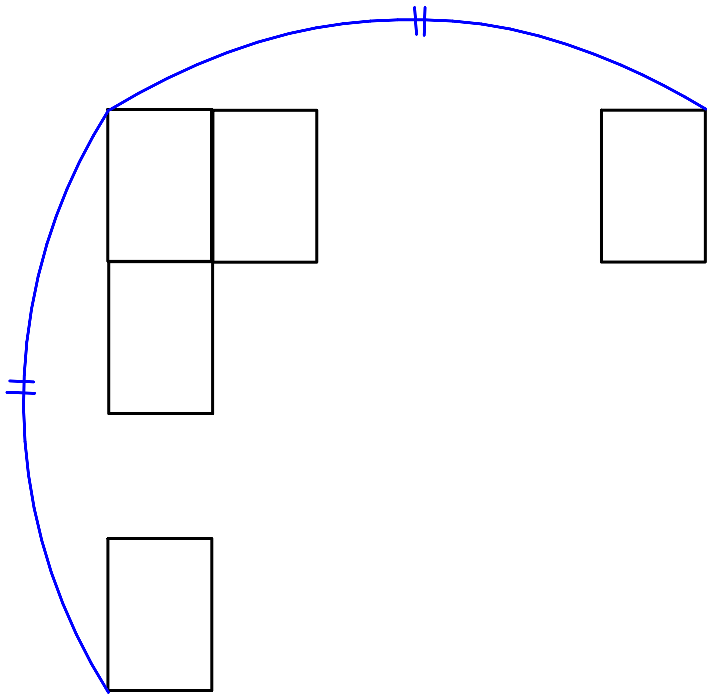
최소공배수는 = 2x3x3x5 = 90

따라서, 90개의 톱니가 지나기 위해서는

B 톱니바퀴는 90/30 = 3바퀴를 회전해야 한다.

0014

가로의 길이가 12cm, 세로의 길이가 15cm 인 직사각형 모양의 색종이를 한 방향으로 겹치지 않게 빈틈없이 붙여서 가장 작은 정사각형을 만들려고 한다. 이때 정사각형의 한 변의 길이와 필요한 색종이의 수를 차례로 구하시오.



* 작은 직사각형으로 큰 정사각형을 만드는 것이므로,
정사각형의 가로, 세로 길이가 12와 15의 공배수이다.
가장 작은 정사각형이므로 '최소공배수'

$$\begin{array}{r|rr} 3 & 12 & 15 \\ \hline & 4 & 5 \end{array}$$

최소공배수 = 3x4x5 = 60

정사각형 한 변의 길이가 60이므로
가로 12인 직사각형 한변의 길이가 5번 들어가고
세로 15인 직사각형 한변의 길이가 4번 들어간다.

따라서, 작은 직사각형의 수는 4x5 = 20개

0015

30, 42의 어느 수로 나누어도 나머지가 3인 가장 작은 자연수를 구하시오.

$$\begin{array}{r|l} & \text{몫} \\ 30 & \boxed{} \\ \hline & 3 \end{array}$$

$\boxed{} = 30 \times \text{몫} + 3$ 마찬가지로 $\boxed{} = 42 \times \text{몫} + 3$

* '네모 보다 3이 작은 수'가 30과 42의 공배수이다.
  그런데 가장 작은 자연수이므로, 30과 42의 최소공배수이다.

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 30 & 42 \\ \hline 3 & 15 & 21 \\ \hline & 5 & 7 \end{array}$$

최소공배수는 $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$이고,
'네모 보다 3이 작은 수'가 210이다.

따라서, 구해야 하는 가장 작은 자연수는 $210+3 = 213$

0016

5로 나누면 3이 남고 7로 나누면 2가 남는 가장 작은 자연수를 구하시오.

$$\begin{array}{r|l} & \text{몫} \\ 5 & \boxed{} \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \boxed{} = 5\times\text{몫} + 3$$

$5\times1 + 3 = 8$
$5\times2 + 3 = 13$
$5\times3 + 3 = 18$
$5\times4 + 3 = 23$
$5\times5 + 3 = 28$
...

5의 배수에 3을 더한 수

$$\begin{array}{r|l} & \text{몫} \\ 7 & \boxed{} \\ \hline & 2 \end{array} \qquad \boxed{} = 7\times\text{몫} + 2$$

$7\times1 + 2 = 9$
$7\times2 + 2 = 16$
$7\times3 + 2 = 23$
$7\times4 + 2 = 30$
$7\times5 + 2 = 37$
...

7의 배수에 2을 더한 수

0017

두 분수 $\frac{12}{n}, \frac{18}{n}$을 모두 자연수로 만드는 자연수 n의 값 중에서 가장 큰 수는?

① 2 ② 3 ③ 4

④ 6 ⑤ 12

* $\frac{12}{n}$ 이 자연수가 되려면, 12와 n을 약분해서 분모 n이 1로 되어야 한다.

따라서, n은 12의 약수이어야 한다. (12가 n의 배수라고 해도 동일한 뜻이다)

* 마찬가지로 n은 18의 약수이어야 한다.

따라서, n은 12와 18의 공약수인데, 문제에서 가장 큰 수를 구하라고 했으므로,
12와 18의 최대공약수이다.

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 12 & 18 \\ \hline 3 & 6 & 9 \\ \hline & 2 & 3 \end{array}$$

최대공약수는 6

0018

두 분수 $\frac{15}{16}$, $\frac{25}{12}$ 중 어느 것에 곱해도 자연수가 되는 가장 작은 분수는?

① $\frac{5}{48}$　② $\frac{5}{24}$　③ $\frac{12}{5}$　$\frac{\triangle}{\square}$

④ $\frac{24}{5}$　⑤ $\frac{48}{5}$

$$\frac{15}{16} \times \frac{\triangle}{\square} = \frac{\quad}{1}$$

* 곱한 결과가 자연수가 되기 위해서는 약분을 한 후에, 분모가 1이 되어야 한다.

$$\frac{25}{12} \times \frac{\triangle}{\square} = \frac{\quad}{1}$$

따라서, $\square$는 15와 25하고 약분해서 분모가 1이 되어야 하므로 공약수이다.
그리고, $\triangle$는 16과 12하고 약분해서 분모가 1이 되어야 하므로 공배수이다.

$\frac{\triangle}{\square}$ 가 가장 작은 분수이므로 분자는 작고, 분모는 커야 한다. $\frac{\text{최소공배수}}{\text{최대공약수}}$

$$\begin{array}{r|rr} 5 & 15 & 25 \\ \hline & 3 & 5 \end{array}$$

최대공약수 = 5

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 16 & 12 \\ \hline 2 & 8 & 6 \\ \hline & 4 & 3 \end{array}$$

최소공배수 = 2x2x3x4 = 48

따라서, $\frac{\triangle}{\square} = \frac{48}{5}$

0019

두 자연수 a, b의 최대공약수는 6, 최소공배수는 210이고 $a-b=12$일 때, $a+b$의 값은?

① 72 ② 108 ③ 154

④ 216 ⑤ 432

* 두 자연수 A와 B의 최대공약수가 G이고, 최소공배수가 L이면, $A \times B = G \times L$이 성립한다.

$a \times b = 6 \times 210$

여기서, a와 b의 최대공약수가 6이기 때문에,
$a = 6 \times m$, $b = 6 \times n$ 이라고 할 수 있다. 특히, m과 n은 서로소이다.

만약, m과 n이 서로소가 아니라면, 1이 아닌 공약수가 존재하게 되고,
그러면 a와 b의 최대공약수가 6이 아니기 때문이다.

$a = 6 \times m > b = 6 \times n$

$6 \times m \times 6 \times n = 6 \times 210$

$m \times n = 35$

(1) $m = 35$, $n = 1$

$a = 6 \times 35 = 210$, $b = 6 \times 1 = 6$
따라서, $a-b = 12$ 가 성립하지 않는다

(2) $m = 7$, $n = 5$

$a = 6 \times 7 = 42$, $b = 6 \times 5 = 30$
따라서, $a-b = 12$ 가 성립한다.

따라서, $a+b = 42 + 30 = 72$

0020

두 자연수의 곱이 192이고 최소공배수가 48일 때, 두 수의 최대공약수를 구하시오.

* 두 자연수 A와 B의 최대공약수가 G이고, 최소공배수가 L이면, A×B = G×L이 성립한다.

$A \times B = 192$

최소공배수 $L = 48$

최대공약수 $G = ?$

$192 = 48 \times ?$

따라서, $? = 4$